

פתרון בעיית גובה המיסים

ביבליוגרפיה

ולסיכום

פתרון הבעיה

אלגוריתם דייקסטרה

גובה המיסים

אלגוריתם:
אלגוריתם הוא
רצף הוראות
מתמטיות בסדר
קבוע.

פתיח

מטרת עבודתי היא הצגת פתרון לבעיה בשם "גובה המיסים", בעיה מתחום תורת המספרים. אני מתכוון לעשות זאת בדרך הכי טובה, בעזרת "אלגוריתם דייקסטרה", אלגוריתם מעולם הגרפים. משתמשים באלגוריתם זה בכדי למצוא את הדרך היעילה ביותר להעביר מידע. השערתי היא שלמרות שגובה המיסים ואלגוריתם דייקסטרה הינם מתחומי דעת שונים, בכל זאת אפשר לשלב אותם.

השערתי מבוססת על כך שבמבט ראשון, בעיית גובה המיסים לא קשורה לכאורה להעברת מידע, אבל במבט מקרוב אפשר לראות שיש דרך או רצף של פעולות שניתן לעשות בכדי להגיע לפתרון. לכן אני חושב שאפשר בדרך כלשהי להשתמש באלגוריתם דייקסטרה.

מגיש: אופק מוסטובוי, במסגרת "עבודות חקר וגמר לכיתות ט", מרכז מדע ודעת למחוננים במכללת תל חי, שנת הלימודים תשע"א, 2011



פתרון בעיית גובה המיסים

ביבליוגרפיה

ולסיכום

פתרון הבעיה

אלגוריתם דייקסטרה

גובה המיסים

פירוש מושגים:

• מחלקים של מספר:

המספרים, אשר אם מחלקים

את המספר בהם מתקבל

מספר טבעי.

• מספר זמין:

מספר אשר יש לו מחלקים

גובה המיסים

בעיית גובה המיסים היא משחק לשחקן אחד שהומצא על ידי ניצה מובשוביץ-הדר. המשחק נועד לעורר התעניינות במתמטיקה אצל ילדים.

חוקי המשחק

- כל מספר יכול להילקח רק פעם אחת ע"י השחקן או גובה המיסים.
- בכל פעם שאתה בוחר מספר בין 1-24 גובה המיסים לוקח את כל המחלקים הזמינים של המספר.
- אם נבחר מספר ללא מחלקים, גובה המיסים מקבל את המספר במקומך.
- בסיום המשחק כל 24 המספרים מתחלקים בין השחקן לגובה המיסים.



פתרון בעיית גובה המיסים

ביבליוגרפיה

ולסיכום

פתרון הבעיה

אלגוריתם דייקסטרה

גובה המיסים

פעולות המשחק

1. אתה בוחר מספר זמין כלשהו
2. בודקים אם למספר זה יש מחלקים זמינים
4. אתה מקבל את המספר שבחרת
5. גובה המיסים מקבל את כל המחלקים של המספר
6. מהלך חוזר על פעולות המשחק
7. אם נשארו רק מספרים לא זמינים גובה המיסים מקבל את כולם

מטרת המשחק – להגיע לסכום המספרים המכסימלי ולנצח את גובה המיסים.



פתרון בעיית גובה המיסים

ביבליוגרפיה

ולסיכום

פתרון הבעיה

אלגוריתם דייקסטרה

גובה המיסים

דוגמה למשחק: משחק במספרים 1-6. ההסבר של כל סיבוב מופיע במקף, בכתב נטוי

סיבוב 1: אתה בוחר 5 לכן גובה המיסים מקבל את המספר 1.

– המחלק היחיד של המספר 5 הוא 1 ולכן גובה המיסים מקבל אותו –

סיבוב 2: אתה בוחר 4 לכן גובה המיסים מקבל המספר 2

– מחלקיו של המספר 4 הם: 2 ו-1 ומאחר שהמספר 1 נלקח הוא אינו זמין ולכן גובה המיסים מקבל רק את המספר 2 –

סיבוב 3: אתה בוחר 6 וגובה המיסים מקבל את המספר 3

– מחלקיו של המספר 6 הם: 3,2, ו-1 ומאחר והמספרים 1 ו-2 נלקחו בסיבובים הקודמים ולכן הם אינם זמינים יותר –

תוצאות המשחק:

המספרים שנלקחו על ידיך הינם: 5,4,6 וסכומם $15=4+5+6$

המספרים שנלקחו על ידי גובה המיסים: 1,2,3 וסכומם $6=1+2+3$

לכן הניצחון הוא שלך, בסך 9 נקודות



פתרון בעיית גובה המיסים

ביבליוגרפיה

ולסיכום

פתרון הבעיה

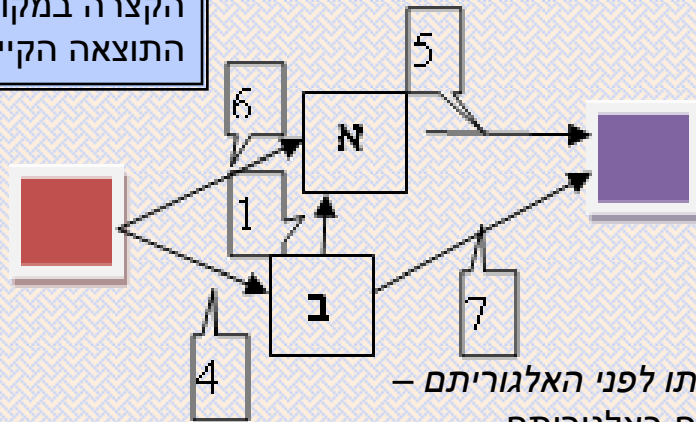
אלגוריתם דייקסטרה

גובה המיסים

לעדכן: אם נמצאה דרך קצרה יותר כתוצאה מפעולות האלגוריתם רשמים את התוצאה הקצרה במקום התוצאה הקיימת.

אלגוריתם דייקסטרה

אלגוריתם דייקסטרה הוא אלגוריתם אשר מאפשר לגלות מה המרחק הקצר ביותר בו ניתן להגיע מנקודות לנקודות על מפה או גרף. מטרת האלגוריתם: לגלות מה המרחק הקצר ביותר בו ניתן להגיע מהריבוע האדום עד הריבוע הסגול.



איך האלגוריתם עובד:

- הריבועים מסמלים נקודות
- המספרים מסמלים את המרחק בין נקודה לנקודה. שלבי האלגוריתם: נקרא לריבוע האדום בסיס

- מאחר ופעולות האלגוריתם דורשות את הצורך ב"בסיס" נגדיר אותו לפני האלגוריתם –
- 1. כל עוד יש נקודות שלא נכללות כבסיס נבצע את המהלכים הבאים באלגוריתם.
- המהלך הבא הוא בדיקה כדי לראות אם האלגוריתם סיים את עבודתו וכל הנקודות כבר ממוספרות. פקודה זו ממוקמת בהתחלה כי האלגוריתם הוא מעין לולאה –
- 2. נעדכן את כל הנקודות הסמוכות לבסיס
- 3. נבחר את הנקודה הקרובה ביותר לבסיס ונגדיר אותה גם כחלק מן הבסיס
- 4. נחזור על מהלכים 1, 2 ו-3



פתרון בעיית גובה המיסים

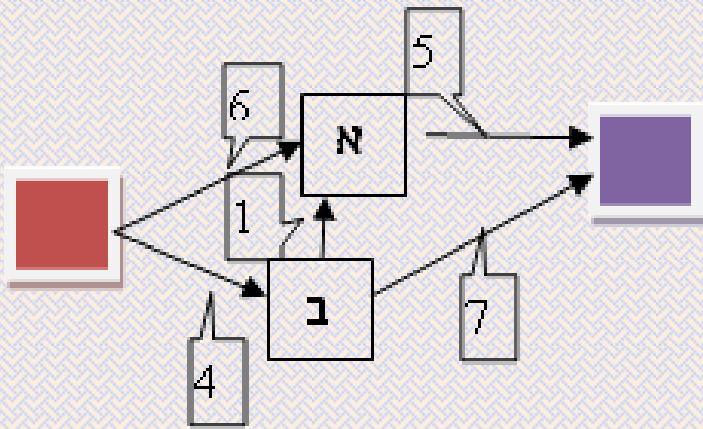
ביבליוגרפיה

ולסיכום

פתרון הבעיה

אלגוריתם דייקסטרה

גובה המיסים



דוגמה: הדוגמה היא לפי התמונה בצד שמאל. כל המספרים במפה הם הנתונים של אורך הדרך מנקודה לנקודה. נקרא לנקודה העליונה "א" ולתחתונה "ב".

סיבוב ראשון:

יש נקודות שלא נכללות כבסיס לכן נמשיך בפעולות האלגוריתם נעדכן את א' ל-6 כי זאת הדרך הכי קצרה ואת ב' ל-4 מאחר והמרחק של ב' מן הבסיס יותר קצר נצרף אותו לבסיס.

סיבוב שני:

יש נקודות שלא נכללות כבסיס לכן נמשיך בפעולות האלגוריתם.

נעדכן את המרחק של א' מן הבסיס האדום ל-5

– מכיוון שהדרך להגיע ל-ב' היא 4 והדרך מ-ב' ל-א' היא 1

לפיכך נמצאה דרך להגיע ל-א מהריבוע האדום ב-5.

דרך זו הינה יותר קצרה מן ה-6 שנמצא בסיבוב הקודם אז נעדכן אותו ל-5 –

נעדכן את הדרך להגיע לקובייה הסגולה מן הריבוע האדום ל-11

– הדרך מן הריבוע האדום ל-ב' היא 4 ועוד הדרך מ-ב' לקובייה הסגולה היא $11=4+7$ –

מאחר והנקודה הקרובה ביותר לבסיס היא א' לכן נצרף אותה לבסיס.



פתרון בעיית גובה המיסים

ביבליוגרפיה

ולסיכום

פתרון הבעיה

אלגוריתם דייקסטרה

גובה המיסים

סיבוב שלישי:

יש נקודות שלא נכללות כבסיס לכן נמשיך בפעולות האלגוריתם.

נעדכן את הקובייה הסגולה ל-10

–הדרך מן הקובייה האדומה לא' היא 5 ועוד 5, הדרך מ-א' לקובייה הסגולה $10=5+5$
מכיוון שנמצאה דרך יותר קצרה להגיע לקובייה הסגולה יש לעדכן אותה –

סיבוב רביעי:

כל הנקודות מוגדרות כבסיס ולכן נגמרה פעולת האלגוריתם.

סיכום האלגוריתם:

נמצאה הדרך הקצרה ביותר להגיע לקובייה הסגולה מהקובייה האדומה.

הדרך הקצרה ביותר לקובייה הסגולה מהקובייה האדומה היא 10.



פתרון בעיית גובה המיסים

ביבליוגרפיה

ולסיכום

פתרון הבעיה

אלגוריתם דייקסטרה

גובה המיסים

פתרון הבעיה

פתרון הבעיה היא בצורה גרפית ולא מילולית מכיוון שאלגוריתם דייקסטרה למרות היותו אלגוריתם יעיל מאוד, הוא לא "חכם" במיוחד, מפני שהוא יכול לעבוד רק על מפה או גרף.

לכן בשלב ראשון מטרתי היתה לשנות את בעיית גובה המיסים לצורה גרפית. השלב השני היה לתאר את התהליך וההסבר של העבודה הגרפית במילים.

כשניגשתי לבעיה ידעתי כמה דברים מראש, לכן הצעדים הראשונים שבצעתי היו:

1. מספרתי כל נקודה כמספר אותו היא מייצגת
 2. בכדי לחסוך זמן צמצמתי את הבעיה מ-24 מספרים ל-6.
 3. את המרחק מנקודה לנקודה מדדתי לפי המשוואה הבאה $X-y=Z$
- כל אחת מן האותיות מסמלת דבר שונה: X =המס של גובה המיסים Y =המספר שנבחר Z =המרחק בין הנקודות



פתרון בעיית גובה המיסים

ביבליוגרפיה

ולסיכום

פתרון הבעיה

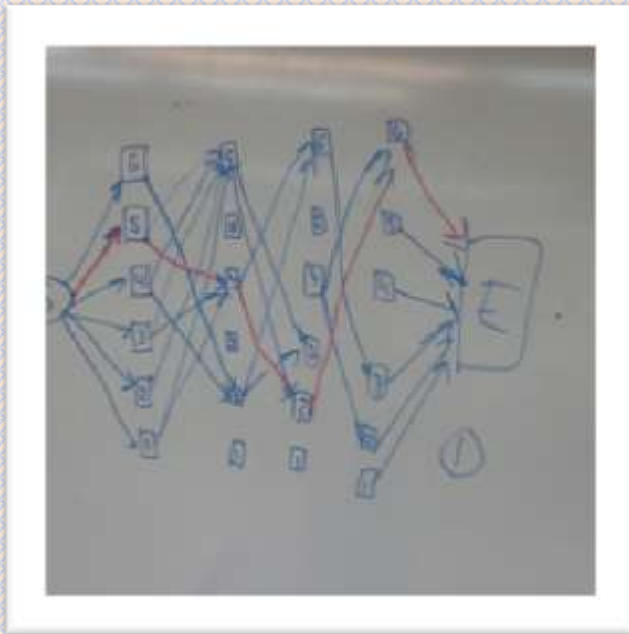
אלגוריתם דייקסטרה

גובה המיסים

שלבי הפתרון

הניסיון הראשון

בניסיון הראשון לפתרון חשבתי פשוט ליצור לכל מספר שורה ותור ולחבר כל מספר למספר אחר. אבל לצערי האלגוריתם לא מצליח לפתור את הבעיה בצורה הזאת. האלגוריתם לא הצליח לפתור את הבעיה על הגרף מכיוון שלכל מספר היו מספר כניסות והאלגוריתם לא יכול היה "לשמור בזיכרון" את המהלכים הקודמים. יכולת כזאת היא הכרחית מכיוון שצריך לזכור אילו מספרים עדיין זמינים ואילו לא.



פתרון בעיית גובה המיסים

ביבליוגרפיה

ולסיכום

פתרון הבעיה

אלגוריתם דייקסטרה

גובה המיסים

הניסיון השני

בניסיון השני ציירתי את הגרף לפי היגיון מסויים שגילינו בשיעור על הבעיה. בעזרת היגיון זה הצלחתי להגיע לפתרון טוב ומהיר, אבל לאחר התייעצות עם אסף – המורה שלי למתמטיקה – הבנתי שלא ניתן להשתמש במה שלמדנו בשיעור. זאת, מכיוון שכל מה שהוכחתי בפתרון שלי הוא שמצאנו דרך טובה לפתרון אבל לא הוכחתי אם זו הדרך הטובה ביותר לפתרון או אם דרך זו תפעל גם באשר נציב מספרים גדולים יותר.



פתרון בעיית גובה המיסים

ביבליוגרפיה

ולסיכום

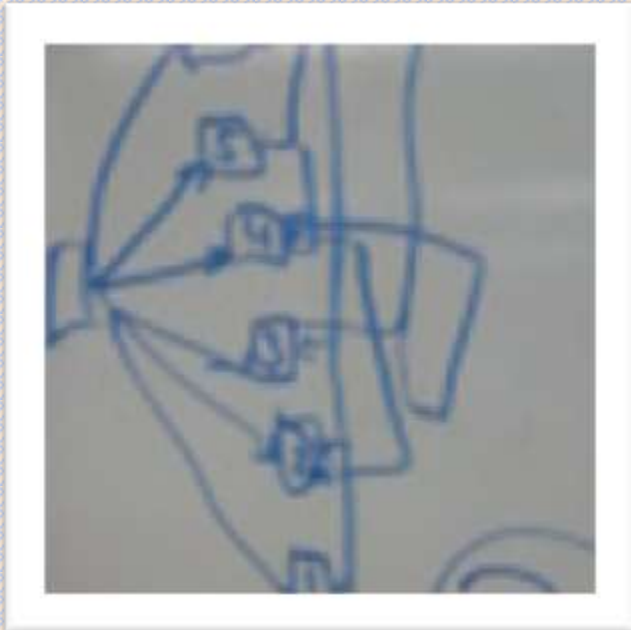
פתרון הבעיה

אלגוריתם דייקסטרה

גובה המיסים

הניסיון השלישי

בניסיון השלישי ניסיתי כיוון אחר. יצרתי שורה של ששה מספרים וחיברתי כל אחד מהם למספרים אשר זמינים לו. אבל גם פה נתקלתי בבעיה שעלתה בניסיון הראשון.



פתרון בעיית גובה המיסים

ביבליוגרפיה

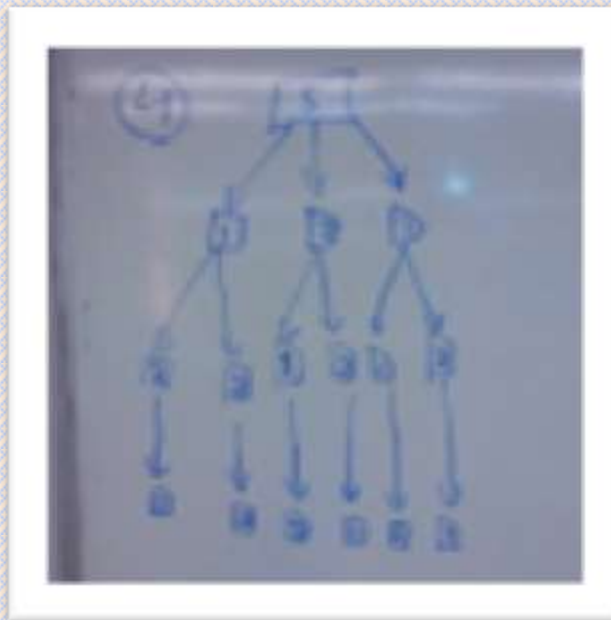
ולסיכום

פתרון הבעיה

אלגוריתם דייקסטרה

גובה המיסים

עצרת היא פעולה מתמטית המיוצגת כמו סימן קריאה. פעולה זו מכפילה את כל המספרים עד למספר כולל המספר עצמו
דוגמה: $3! = 1 * 2 * 3$



הניסיון הרביעי

בניסיון הרביעי יצרתי מין עץ עם גזע שמתחלק ל-6 חלקים, כל אחד מן החלקים מתחלק ל-5 חלקים וכן הלאה. דרך זו היא פיתרון לבעיה אבל היא כל-כך מסורבלת וענקית עד שלא היה כדאי אפילו לצייר אותה במשחק של 6.

זאת, מיכוון שבפתרון זה במשחק של ששה מספרים בלבד, יש לצייר 6 עצרת נקודות ואותו מספר של קווים. מספר זה הוא עצום וגודל במהירות ככל שעולים בגודל המשחק.



פתרון בעיית גובה המיסים

ביבליוגרפיה

ולסיכום

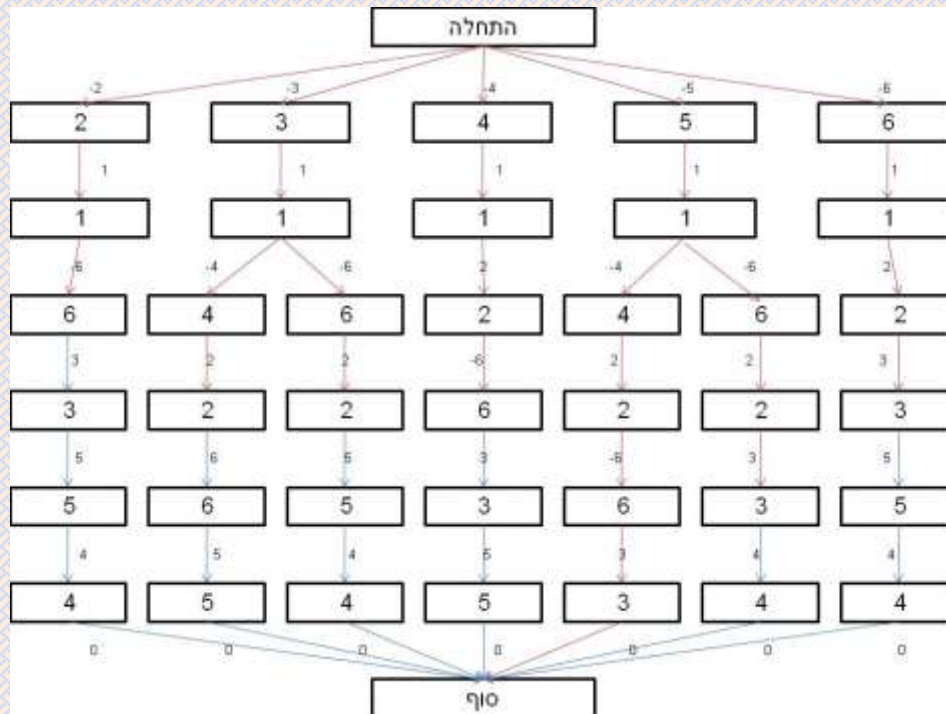
פתרון הבעיה

אלגוריתם דייקסטרה

גובה המיסים

הניסיון החמישי

בניסיון החמישי ניסיתי לעשות את מה שעשיתי בניסיון הרביעי אבל גם בעזרת החוקים של המשחק לצמצם כמה שאפשר את העץ. פתרון זה נתן את התוצאה הכי טובה, כך שבמקום 720 נקודות וקווים הצלחתי לצמצם את העץ ל- 38 נקודות וקווים בלבד ופתרון זה הינו סופי.



פתרון בעיית גובה המיסים

ביבליוגרפיה

ולסיכום

פתרון הבעיה

אלגוריתם דייקסטרה

גובה המיסים

ולסיכום

בעבודה זאת הוכחנו שאפשר לפתור את את בעיית גובה המיסים בעזרת אלגוריתם דייקסטרה ובכך אפשר לאחד שני תחומי דעת שונים במתמטיקה, תורת המספרים ותורת הגרפים.



פתרון בעיית גובה המיסים

ביבליוגרפיה

ולסיכום

פתרון הבעיה

אלגוריתם דייקסטרה

גובה המיסים

ביבליוגרפיה

http://kesher-cham.technion.ac.il/clickit_files/files/index/552619713/910265892/992745751.pdf

http://math.eitan.ac.il/graph_theory/200_Short/202_Short_Dij.htm

http://math.eitan.ac.il/graph_theory/200_Short/203_Short_BF.htm

www.google.com/image

